LINEARE ALGEBRA

ÜBUNGSBLATT 11

1. Man betrachte die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, -x_1)$, und die Vektoren $b_1 = (1, 1, 0), b_2 = (0, 1, 1), b_3 = (1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$, und $b'_1 = (1, 1), b'_2 = (1, -2) \in \mathbb{R}^2$.
   a) Man zeige, dass $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ (d.h. f linear ist)
   b) Man bestimme je eine Basis und die Dimension der Unterräume $\mathrm{Ker}\, f$ und $\mathrm{Im}\, f$.
   c) Man zeige, dass die Liste von Vektoren $b = (b_1, b_2, b_3)$ und $b' = (b'_1, b'_2)$ Basen in $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ bilden.
   d) Man bestimme die Matrizen $[f]_{e,e'}$, $[f]_{e,b'}$, $[f]_{b,e'}$, $[f]_{b,b'}$, wobei e und e' die kanonische Basen in $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$ sind.

2. Man betrachte die lineare Abbildung $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$, mit der Matrix

$$[f]_e = [[f]_{e,e} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -5 \end{pmatrix},$$

bezüglich der kanonischen Basis e von ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4$.
   a) Man bestimme $f(x)$ für jedes $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.
   b) Man zeige, dass $x = (1, 4, 1, -1) \in \mathrm{Ker}\, f$ und $y = (2, -1, 4, 2) \in \mathrm{Im}\, f$.
   c) Man bestimme je eine Basis und die Dimension der Unterräume $\mathrm{Ker}\, f$ und $\mathrm{Im}\, f$.
   d) Man finde, die Koordinaten des Vektors x und y von der Aufgabe b) bezüglich die Bases bestimmt in der aufgabe c).

3. Man betrachte eine Basis $b = (b_1, b_2, b_3)$ von ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$, und $b' = (b'_1, b'_2, b'_3)$ so dass

$$\begin{cases} b_1 = b'_1 + b'_2 + b'_3 \\ b_2 = b'_2 + b'_3 \\ b_3 = b'_3 \end{cases}$$

.
   a) Man bestimme die Matrix $[b']_b$ und zeige man dass b' eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.
   b) Sind $b_1 = (1, 2, 3)$, $b_1 = (-1, -2, 0)$, $b_1 = (2, 0, 1)$, so finde b'.

4. Man betrachte die Vektoren $b_1 = (1, 0, 1), b_2 = (0, 1, 1), b_3 = (1, 1, 1)$ und $b'_1 = (1, 1, 0), b'_2 = (-1, 0, 0), b'_3 = (0, 0, 1)$ alle in dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$.

a) Man zeige, dass $b = (b_1, b_2, b_3)$ und $b' = (b'_1, b'_2, b'_3)$ Basen von $\mathbb{R}^3$ sind, und finde man die Matrix $[b']_b$.
b) Man bestimme $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$, so dass $f(b) = b'$ und man schreibe die Matrix $[f]_{b,b'}$
c) Man zeige, dass der Endomorphism f bestimmt bei der Aufgabe b) ein Isomorphismus ist, und finde man f^{-1}.

5. Für einen Vektorraum V über einen Körper K, bestimme man alle Endomorphismen die bezüglich jede Basis dieselbe Matrix haben (d.h. $f \in \mathrm{End}_K(V)$, so dass $[f]_b = [f]_{b,b}$ hängt nicht von der Basis b).

"Babeş-Bolyai" Universität, Fakultät für Mathematik und Informatik, RO-400084, Cluj-Napoca, Rumänien

E-mail address, George Ciprian Modoi: cmodoi@math.ubbcluj.ro